1) ADJUNTO DE UN OPERADOR LINEAL

Sea V un espacio con producto interno y sea $T:V\rightarrow V$ un operador lineal. Un operador $T^*:V\rightarrow V$, se dice que es adjunto de T si:

$$\left(T\left(\bar{u}\right)\middle|\bar{v}\right)=\left(\bar{u}\middle|T^*\left(\bar{v}\right)\right) \quad \forall\, \bar{u},\bar{v}\in V$$

Donde T^* es el adjunto de T.

Teorema:

Sea V un espacio vectorial sobre un campo K, de dimensión finita y con producto interno. Si ϕ:$V\rightarrow K$ es una funcional lineal, entonces existe un vector único $\bar{x}$ ε V tal que:

$$\phi\left(\bar{u}\right)=\left(\bar{u}\middle|\bar{x}\right) \quad \forall\, \bar{u}\in V$$

Teorema:

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y con producto interno, entonces para cada operador lineal T: $V\rightarrow V$ existe un único adjunto T^*, que también es lineal.

NOTA: Este teorema no se cumple para espacios de dimensión infinita, debido a que en este caso no es posible garantizar la existencia del adjunto. Aunque la unicidad y linealidad de T^* si se verifican cuando éste existe.

Teorema:

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sea B una base ortonormal de V. Si T: $V\rightarrow V$ es un operador lineal, entonces:

$$M_B^B\left(T^*\right)=\left[M_B^B\left(T\right)\right]^*$$

Hay una relación entre las representaciones matriciales de los operadores T y T^* cuando éstas se encuentran referidas a una base ortonormal, dicha relación puede emplearse para obtener el adjunto de un operador dado. La relación es: si A es la representación matricial de T en una base ortonormal, entonces A^* (la conjugada transpuesta de A) es la representación matricial de T^* en dicha base.

NOTA: Cuando la base no es ortonormal no existe una relación sencilla entre las representaciones matriciales de T y T^*.

Algunas propiedades que relacionan un operador T con su adjunto T^* se dan a continuación.

Teorema:

Sea V un espacio con producto interno, W un subespacio de V y T: $V\rightarrow V$ un operador lineal:

1. $T^*(V)=N(T)^{\perp}$
2. $N\left(T^*\circ T\right)=N\left(T\right)$
3. Si W es invariante bajo T entonces $W^{\perp}$ es invariante bajo T^*.

Teorema:

Sea V un espacio vectorial sobre K, con producto interno. Si S y T son operadores lineales en V y α es un escalar de K, entonces:

1. $(T^*)^*=T$
2. $(\alpha T)^*=\bar{\alpha}\, T^*$
3. $(S+T)^*=S^*+T^*$
4. $\left(S\circ T\right)^*=T^*\circ S^*$

2) OPERADOR NORMAL

Sea V un espacio con producto interno y sea T:$V\rightarrow V$ un operador lineal. Se dice que T es normal si $T\circ T^{*}=T^{*}\circ T$.

De la definición anterior se sigue de inmediato que si T es normal, entonces T* también es normal y viceversa.

Los operadores normales tienen las siguientes propiedades. **Teorema:**

1. $\|T(\bar{v})\| = \|T^{*}(\bar{v})\| \qquad \forall\ \bar{v} \in V$
2. Si $T(\bar{v}) = \lambda\bar{v}$ entonces $T^{*}(\bar{v}) = \bar{\lambda}\,\bar{v}$
3. Si $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ son vectores característicos de T correspondientes a los valores λ_1 y λ_2 y además $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $(\bar{v}_1 | \bar{v}_2) = 0$.

3) OPERADORES HERMITIANOS, ANTIHERMITIANOS, UNITARIOS, SIMÉTRICOS, ANTISIMÉTRICOS Y ORTOGONALES

Se presentan a continuación algunos casos particulares de operadores normales, los cuales suelen distinguirse con diferentes nombres cuando el espacio vectorial está definido sobre el campo de los números complejos y cuando está definido sobre el campo de los números reales.

Definición:

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ (sobre $\mathbb{R}$) con producto interno y sea T: $V\rightarrow V$ un operador lineal, se dice que:

1. T es *hermitiano* (*simétrico*) si:
$$T^{*}=T$$
2. T es *antihermitiano* (*antisimétrico*) si:
$$T^{*} = -T$$
3. T es *unitario* (*ortogonal*) si:
$$T^{*} = T^{-1}$$

Todos los operadores nombrados anteriormente tienen las siguientes propiedades con relación a los valores característicos.

Teorema:

Sea V un espacio vectorial con producto interno y sea λ un valor característico del operador lineal T: $V\rightarrow V$:

1. Si $T^{*} = T$ entonces λ es real.
2. Si $T^{*} = -T$ entonces λ es imaginario.
3. Si $T^{*} = T^{-1}$ entonces $|\lambda| = 1$.

A continuación se presenta una caracterización para las representaciones matriciales de los tipos de operadores definidos anteriormente, cuando están referidas a *bases ortonormales*.

Teorema:

Sean V un espacio con producto interno, B una *base ortonormal* de V, T: $V\rightarrow V$ un operador lineal y A la representación matricial de T referida a la base B:

1. $T^* = T$ si y sólo si $A^* = A$
2. $T^* = -T$ si y sólo si $A^* = -A$
3. $T^* = T^{-1}$ si y sólo si $A^* = A^{-1}$

En conclusión: un operador es *hermitiano* (*simétrico*) si y sólo si su representación matricial referida a una base ortonormal es una matriz *hermitiana* (*simétrica*). De manera análoga, esto mismo aplica para operadores *antihermitianos* (*antisimétricos*) y *unitarios* (*ortogonales*).

4) PROYECCIONES ORTOGONALES Y TEOREMA ESPECTRAL

El teorema espectral permite descomponer un operador normal, expresándolo como combinación lineal de ciertos operadores conocidos como *proyecciones ortogonales*.

Teorema:

Sean V un espacio vectorial con producto interno, W un subespacio de V y $W^{\perp}$ el complemento ortogonal de W. Si:

$$\overline{v} = \overline{w} + \overline{w'}, \quad \text{donde } \overline{w} \in W \text{ y } \overline{w'} \in W^{\perp}$$

entonces el operador P: $V \rightarrow V$ definido por:

$$P\left(\overline{v}\right) = \overline{w}$$

se llama la proyección ortogonal sobre W.

NOTA: Si W es un subespacio de V y P es la proyección ortogonal sobre W; entonces, para cualquier vector $\overline{v} \in V$, $P\left(\overline{v}\right)$ es el vector de W que más se aproxima a $\overline{v}$.

Teorema espectral:

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ (sobre $\mathbb{R}$), de dimensión finita y con producto interno, y sea T: $V \rightarrow V$ un operador normal (simétrico). Si λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son los diferentes valores característicos de T, $E(\lambda_i)$ es el espacio característico correspondiente a λ_i y P_i es la proyección ortogonal sobre $E(\lambda_i)$, entonces:

1. $T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_k P_k$
2. $P_1 + P_2 + \ldots + P_k = I$
3. $P_i \circ P_j = 0, \quad \text{para } i \neq j$

La expresión de (1) se conoce como "*descomposición espectral*" del operador T; tal descomposición es única (salvo en el orden de los sumandos).

5) FORMAS CUÁDRICAS

Una forma cuádrica en $\mathbb{R}^n$ es una función Q definida en $\mathbb{R}^n$ cuyo valor en un vector x en $\mathbb{R}^n$ puede calcularse por medio de una expresión de la forma $Q(x) = x^T A x$ donde A es una matriz simétrica $n \times n$. La matriz A se llama matriz de la forma cuádrica.

El ejemplo más sencillo de una forma cuádrica diferente de cero es $Q(x) = x^T I x = \|x\|^2$

Cuando A es una matriz $n \times n$, la forma cuádrica $Q(x) = x^T A x$ es una función de valores reales con dominio $\mathbb{R}^n$. Es posible distinguir varias clases importantes de formas cuádricas por el tipo de valores que asumen para diversos x.

Una forma cuádrica Q es:

1. Definida positiva si $Q(x) > 0$ para toda $x \neq 0$
2. Definida negativa si $Q(x) < 0$ para toda $x \neq 0$
3. Indefinida si $Q(x)$ toma valores tanto positivos como negativos.

Asimismo, se dice que Q es semidefinida positiva si $Q(x) \geq 0$ para toda x, y Q es semidefinida negativa si $Q(x) \leq 0$ para toda x.

Formas cuádricas y valores propios:

Sea A una matriz simétrica $n \times n$. Entonces una forma cuádrica $x^T A x$ es:

1. ***Definida positiva*** si y sólo si todos los valores propios de A son positivos.
2. ***Definida negativa*** si y sólo si todos los valores propios de A son negativos.
3. ***Indefinida*** si y sólo si A tiene valores propios tanto positivos como negativos.

GLOSARIO DE MATRICES

Matrices simétricas/antisimétricas:

Sea A una matriz de $n\times n$ con elementos en $\mathbb{C}$. Se dice que:

1. Es simétrica si $A^T = A$

$$\therefore \left[a_{ij}\right]=\left[a_{ji}\right] \quad \forall\ i,\ j$$

2. Es antisimétrica si $A^T = -A$

$$\therefore \left[a_{ij}\right]=\left[-a_{ji}\right] \quad \forall\ i,\ j$$

NOTA: Los elementos de la diagonal principal deben ser nulos.

Si A es una matriz cuadrada, entonces:

1. $A+A^T$ = matriz simétrica

2. $A-A^T$ = matriz antisimétrica

Matrices hermitianas/antihermitianas:

Sea A una matriz de $n\times n$ con elementos en $\mathbb{C}$. Se dice que:

1. Es hermitiana si $A^* = A$

$$\therefore \left[a_{ij}\right]=\left[\overline{a}_{ji}\right] \quad \forall\ i,\ j$$

NOTA: Los elementos de la diagonal principal deben ser números reales.

2. Es antihermitiana si $A^* = -A$

$$\therefore \left[a_{ij}\right]=\left[-\overline{a}_{ji}\right] \quad \forall\ i,\ j$$

NOTA: Los elementos de la diagonal principal deben ser números imaginarios.

Si A es una matriz cuadrada, entonces:

1. $A+A^*$ = matriz hermitiana

2. $A-A^*$ = matriz antihermitiana

Matrices ortogonales y unitarias:

Una matriz A no singular se dice que:

1. Es ortogonal si $A^T = A^{-1}$

con lo que: $AA^T = A^T A = I$

2. Es unitaria si $A^* = A^{-1}$

con lo que: $AA^* = A^* A = I$